Il gatto in caduta.

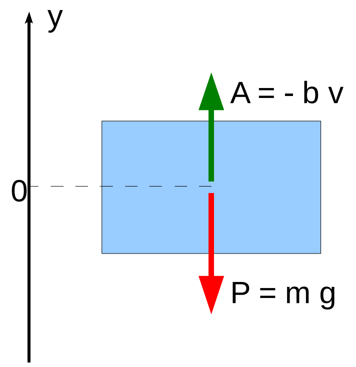

Figura 1 Modello ideale del gatto.

Supponiamo di buttare un gatto dal settimo piano di un edificio. Sperimentalmente, si vede, che dopo un certo tempo, il gatto, che prima si muoveva impulsivamente, rilassa tutti i suoi muscoli, come se fosse fermo e non avvertisse il pericolo. Cercheremo di spiegare questo fenomeno.
Quando il gatto cade in aria, egli è sottoposto principalmente a due forze: la forza di gravità e la forza di attrito dovuta all'aria. Per semplificare il ragionamento, ipotizziamo che il gatto non abbia la sua classica forma, ma sia semplicemente un parallelepipedo che cade come in .
La forza di gravità è diretta lungo le y negative, quindi

$$P_y = - mg$$

dove m è la massa del gatto, g è l'accelerazione di gravità pari a 9.81 m/s^2.
La forza di attrito A è diretta lungo le y positive ed è direttamente proporzionale alla velocità (per velocità sufficientemente piccole da trascurare la generazione di vortici), quindi

$$A_y = - bv$$

La forza risultante agente sul centro di massa è

$$F_y = - \; mg - bv$$

Per la legge di Newton F deve essere uguale alla massa del corpo per l'accelerazione. Ne segue

$$m\,a = - mg - bv$$

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -m\,g - b\frac{d\,y}{dt}$$

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{d\,y}{dt} = -m\,g \qquad (1)$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $m\,\lambda^2 + b\,\lambda = 0$ *che ha come soluzioni* $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -b/m$.
La soluzione particolare dell'equazione 1, per somiglianza, è $y_p(t) = -\frac{mg}{b}t$.
La soluzione generale della 1 è

$$y(t) = A\,e^{-\frac{b}{m}t} + B - \frac{mg}{b}\,t \qquad (2)$$

dove A e B sono due costanti reali che si possono ricavare dalle condizioni iniziali. Nel nostro caso, il nostro gatto, quando viene lasciato cadere, è nella posizione $y = 0$ e ha velocità iniziale nulla. Dalla 2 si ricava

$$y'(t) = v\,(t) = -A\,\frac{b}{m}\;e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

v(0) deve essere nulla quindi si ottiene

$$A\,\frac{b}{m} = -\,\frac{mg}{b}$$

$$A = -\frac{m^2 g}{b^2}$$

e infine dalla 2 (per *t = 0* deve essere *y = 0*) si ottiene $A + B = 0$ e quindi $B = -A$.
La soluzione finale del nostro problema è

$$y\,(t) = -\frac{m^2 g}{b^2}\, e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}\, t + \frac{m^2 g}{b^2}$$

$$v\,(t) = \frac{mg}{b}\, e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

$$a(t) = -g\, e^{-\frac{b}{m}t}$$

Sotto sono riportati i grafici della posizione, della velocità e dell'accelerazione, in funzione del tempo, di un corpo che sottostà alle leggi precedenti. Le costanti sono state scelte come segue: $b = 0.5\ kg/s$; $m = 1kg$; $g = 9.81\ m/s^2$. Si noti che questi valori non sono assolutamente vicini a quelli dell'esperimento da noi considerati ma ci permetto di fare comunque delle osservazioni di carattere generale.
Si è soliti definire una grandezza $\tau = m/b$ che ha le dimensioni del tempo *[s]* , caratterizzante del moto. Infatti è facile verificare che dopo un tempo pari a $5\ \tau$ il termine esponenziale che compare nelle equazioni dello spazio e della velocità, risulta essere meno dell' 1% del suo valore iniziale. τ è chiamata costante di tempo, e dopo $5\ \tau$ si è soliti dire che il sistema è a regime. Infatti il corpo si muove approssimativamente di moto rettilineo uniforme e la velocità è in modulo circa *mg/b* e viene chiamata *velocità di regime*. L'accelerazione può invece considerarsi nulla. Nei grafici, la costante di tempo è pari a *2 secondi* e si vede, che dopo 10 secondi l'andamento delle funzioni, si confonde con i loro asintoti.

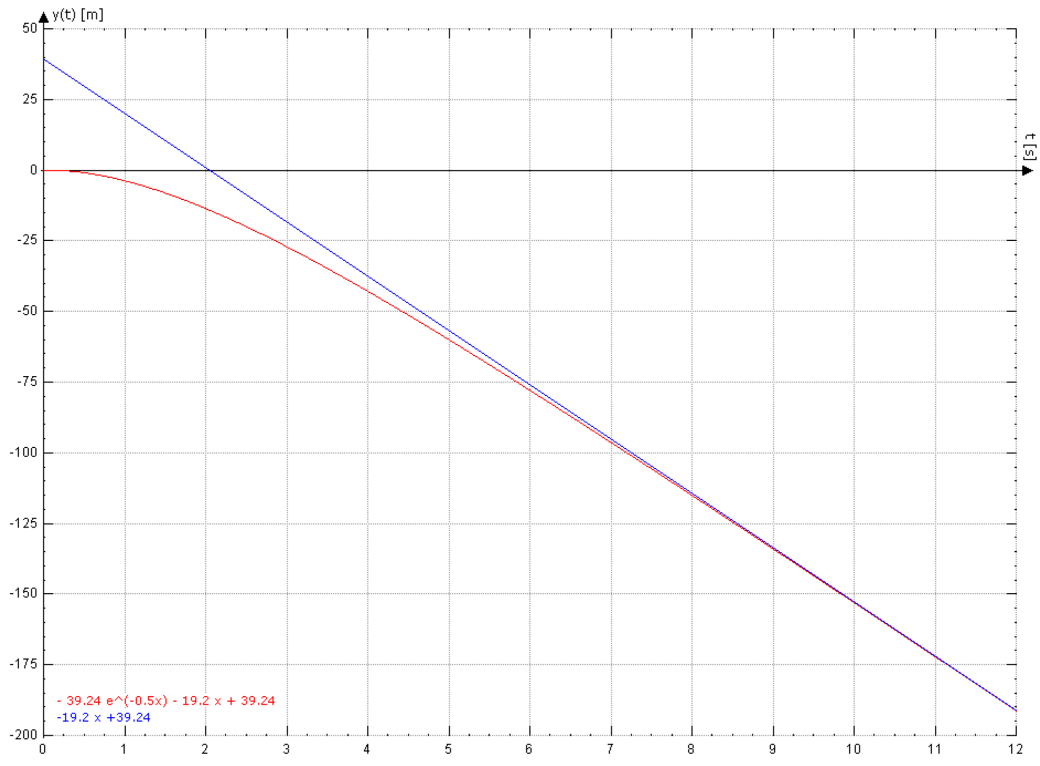

Figura 2 Grafico dell'altezza in funzione del tempo del gatto.

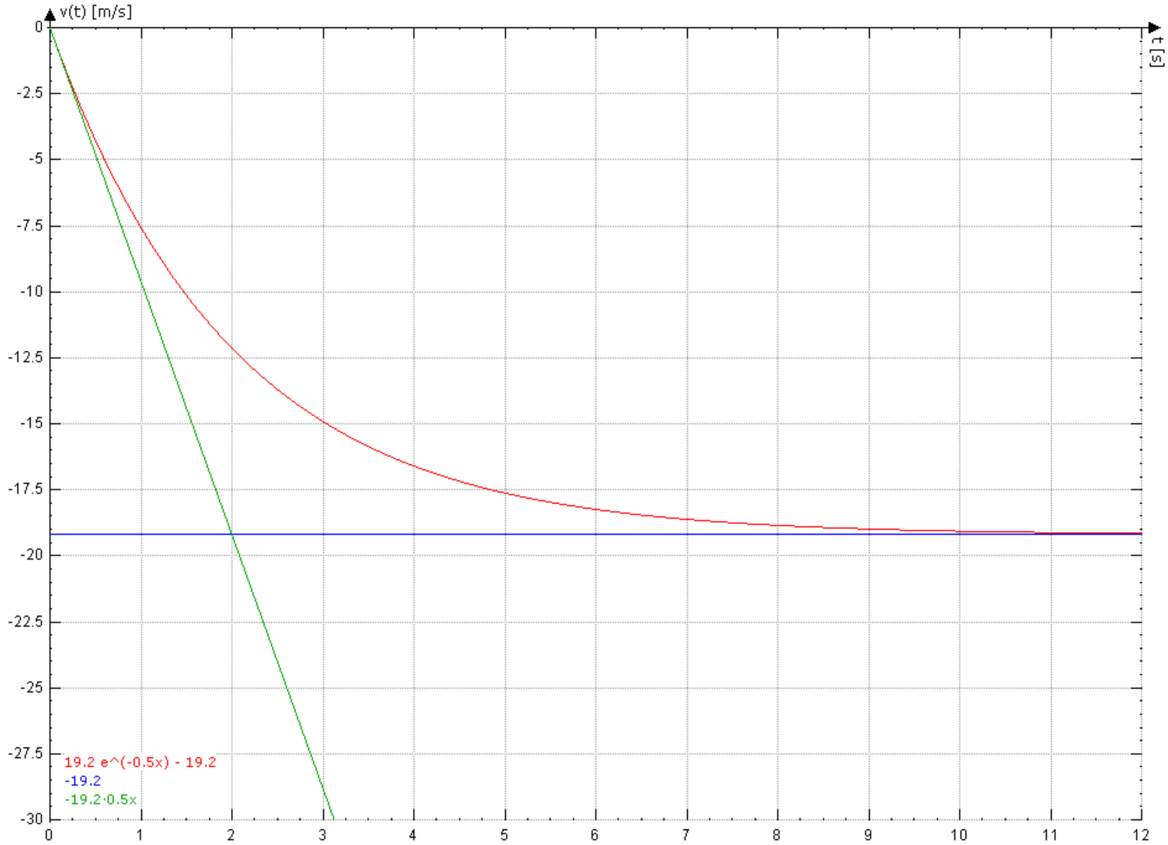

Figura 3 Grafico della velocità in funzione del tempo del gatto

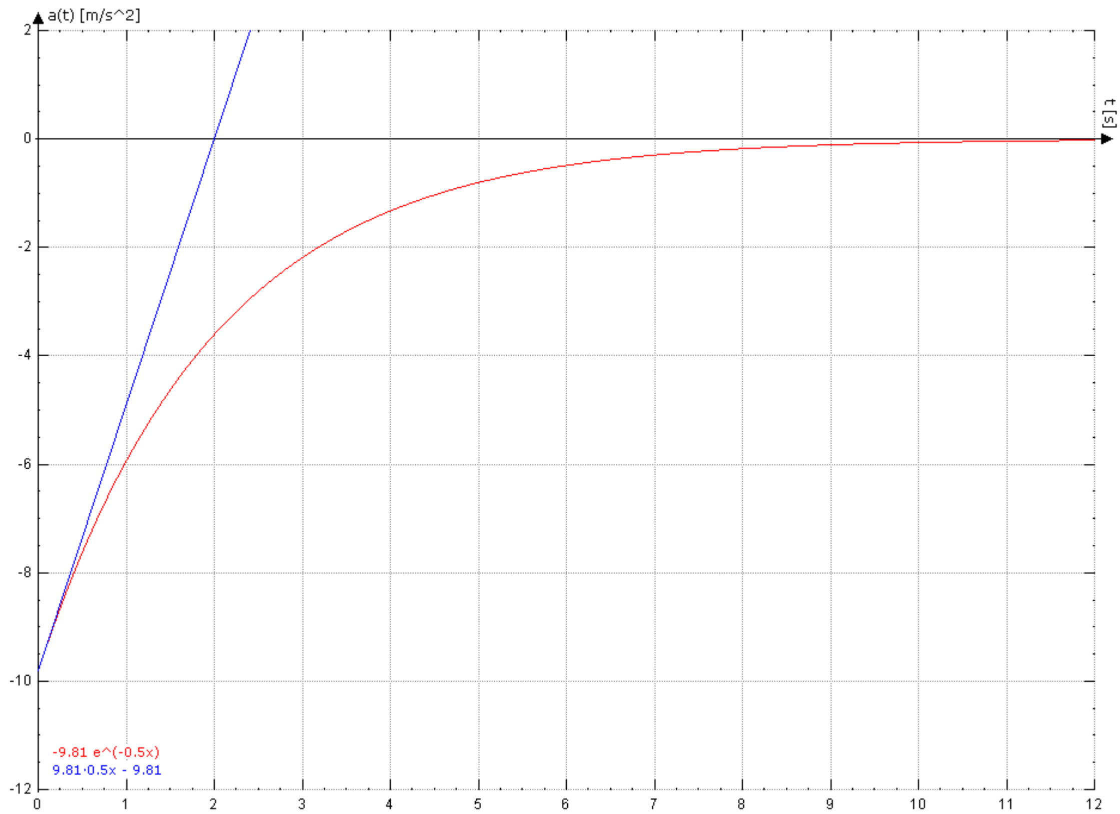

Figura 4 Grafico dell’accelerazione in funzione del tempo del gatto

È ora possibile spiegare il comportamento del gatto: dopo un tempo pari a 5 τ possiamo dire che il gatto ha raggiunto la velocità di regime, non è più soggetto ad alcuna forza (in quanto $\underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{P}}$) e la sua accelerazione è nulla. Ma, essere fermi o muoversi di moto rettilineo uniforme, per il primo principio della dinamica, non fa differenza, allora il gatto si sente come se fosse fermo e rilassa i propri muscoli.
L'immagine qui accanto, mostra in maniera simpatica come il gatto che cade da un'altezza troppo poco alta non riesce a rilassarsi e quindi non cade a quattro zampe (fig.2). Mentre in fig. 3 vediamo questo gatto che, essendo caduto da un'altezza più elevata, aspetta tranquillamente di toccare il suolo.

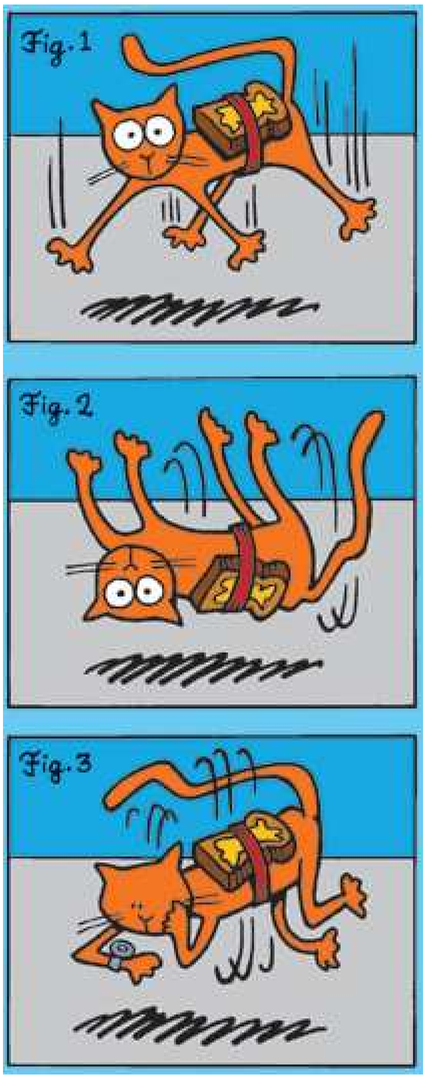

Figura 5 Vignetta comica semplificativa

Considerazioni finali.
Nel fare questi calcoli, sono state fatte delle importanti approssimazioni:

1. Si è considerata la velocità del gatto sufficientemente piccola e la viscosità dell'aria molto alta da poter trascurare i moti vorticosi generati nell'aria.
2. Si è considerato il gatto come un parallelepipedo.
3. Si è considerata l'atmosfera un mezzo omogeneo e isotropo.

Per quanto riguarda la prima, nella realtà non si verifica mai un'ipotesi del genere, perché la viscosità dell'aria è talmente piccola che il gatto raggiunge velocità elevate. Rifacendo i calcoli non usando questa approssimazione, si vede che l'attrito non dipende più linearmente dalla velocità, ma è comunque una funzione crescente della velocità e cresce più velocemente di una relazione lineare. Quindi, in ultima analisi, il gatto raggiunge comunque una velocità di regime;
La seconda è servita per trascurare i momenti delle forze che potrebbero nascere da una struttura non simmetrica sulla quale le forze non possono considerarsi applicate al centro di massa (perché l'attrito è distribuito in maniera non uniforme su di una superficie qualunque). Però, più o meno, e possibile considerare il gatto simmetrico e quindi trascurare i momenti delle forze;
La terza è verificata se il gatto cade per un tragitto dove la variazione di densità dell'aria è trascurabile.
Facciamo notare inoltre che il coefficiente b che compare nella forza d'attrito dipende in maniera proporzionale dalla superficie dell'oggetto in questione e dalla viscosità del fluido. Per esempio, nel caso di una sfera di raggio r e un liquido di viscosità μ, $b = 6 \pi \mu r$.