Matematica

Il concetto di limite

Sia data una funzione $f(x)$, definita in X e a valori in $\mathbb{R}$ (con X sottoinsieme di $\mathbb{R}$); dicesi limite di $f(x)$, per $x \to x_0$, quel valore l tale che, fissato un intorno qualsiasi di l, esiste almeno un intorno bucato di x_0 (dipendente da $I(l)$) tale che, per ogni x appartenente a tale intorno, $f(x)$ appartiene all'intorno di l.

In simboli:

$f: X \to \mathbb{R};\ \ X \subset \mathbb{R};\ \ \ l, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \forall\, I(l)\ \exists\, I_l(x_0) :\ \forall\, x \in I(x_0) \to f(x) \in I(l)$$

È importante notare che l'introduzione della definizione di limite permette di studiare la funzione anche in quei punti dove non è possibile calcolarla, grazie al concetto di avvicinamento. Ad esempio è banale conoscere il $\lim_{x \to 4} x^3$ perché la funzione può essere calcolata in quel punto! Se invece consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è ovvio, che senza il concetto di limite, sarebbe assurdo chiedere di calcolare $f(+\infty)$ perché non è possibile fare dei calcoli tradizionali con un oggetto $(+\infty)$ che non è un numero. La definizione di limite allarga quindi gli orizzonti della matematica, passando, in un certo senso, da un calcolo rigoroso e preciso, ad un calcolo "approssimato". Quando scriviamo $f(+\infty)$, non siamo interessati al valore della funzione calcolato in un punto, ma al valore al quale la funzione si avvicina (al valore che la funzione approssima) quando la x diventa sempre più grande (quando la x raggiunge il suo valore limite che è $+\infty$): ovvero

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

Con questa estensione, è possibile interpretare la dicitura $f(+\infty)$ in maniera univoca, se esiste il limite della funzione per $x \to +\infty$.

Ragionamento analogo si potrebbe fare per il calcolo di $f(0)$. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è infatti definita per $x = 0$ in quanto $x = 0$ non appartiene al suo domino. Grazie alla definizione di limite (introducendo il concetto di limite destro e sinistro) è possibile "calcolare" la funzione in questo punto esterno al dominio della funzione stessa. Riusciamo così ad osservare il comportamento della funzione ai confini del suo domino di esistenza, ottenendo una visione più globale della funzione stessa. Con un gioco di parole, si potrebbe dire che il limite matematico estende i limiti della matematica consentendo di effettuare calcoli prima impensabili.

Il concetto di visione globale è importantissimo, perché consente di estrapolare da una sequenza infinita e incomprensibile di numeri, una visione più simile al modo di ragionare della nostra mente. Non a caso il limite è alla base della definizione di derivata.

Limiti e derivate ci danno una visione più umana delle funzione. Prendiamo come esempio, la funzione

$$f(x) = x - \frac{1}{30}x^3$$

Il grafico della funzione e mostrato in Figura 1. Osserviamo la figura senza fare calcoli: questa funzione, per x molto negative diventa molto grande positivamente e per x molto positive diventa molto grande negativamente. Queste informazioni, si ottengono matematicamente calcolando il limite della funzione per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. Osservandola da sinistra a destra, si nota che essa prima decresce fino a -2, poi cresce fino a +2 e infine decresce fino a meno infinito. Matematicamente queste informazioni si deducono dal segno della derivata prima. Analizzando sempre visivamente, è facile osservare che per x positive la funzione è concava verso il basso, e per x negative è concava verso l'alto. Quest'ultima osservazione è deducibile dal segno della derivata seconda. In Figura 2 sono riportate, a prova di ciò, due grafici che mostrano il segno della derivata prima e la derivata seconda.

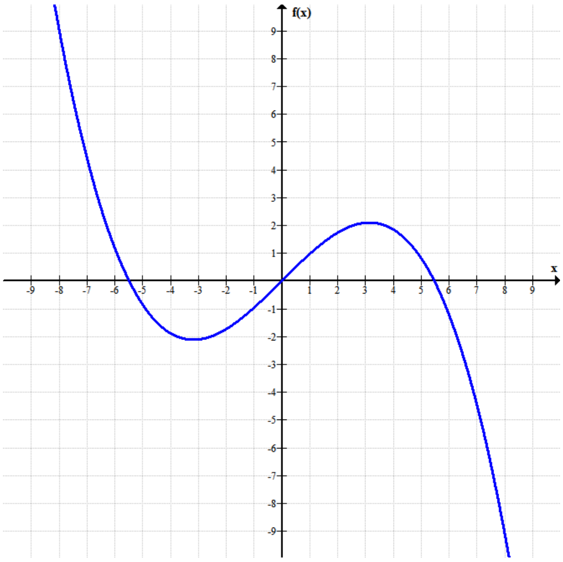
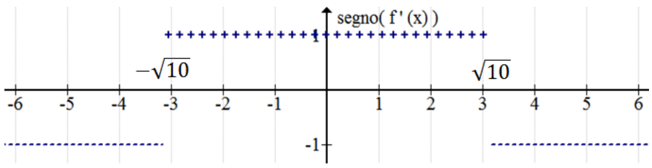


Figura 1 Grafico della funzione studiata.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{10}x^2$$



$$f''(x) = -\frac{1}{5}x$$

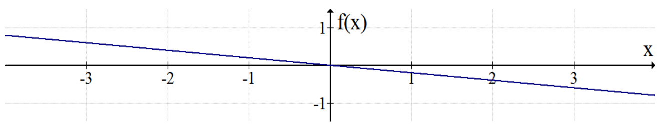


Figura 2 Derivata prima e derivata seconda della funzione.

Possiamo concludere affermando che limiti e derivate non sono un puro formalismo nato per complicare la vita allo studente, ma semplicemente il modo matematico di esprimere ciò che osserviamo naturalmente con i nostri occhi. La semplice espressione di una funzione è soltanto un insieme ordinato di infiniti numeri, che non dà l'idea di ciò che la nostra vista riesce a cogliere. Le sensazioni visive vengono elaborate dal nostro cervello permettendoci di dedurre delle informazioni sull'andamento globale della funzione. L'analogo matematico di questa elaborazione cerebrale è costituito dallo studio di limiti e derivate, che rendono l'idea di ciò che effettivamente "sentiamo".