Matematica

Serie di Fourier

Sia data una funzione periodica, come ad esempio quella mostrata in figura. Questa funzione, per il teorema di Fourier, può essere approssimata dalla somma di una sinusoide a frequenza "fondamentale" e dalle sue "armoniche". Dicesi fondamentale la frequenza associata al periodo T della funzione periodica, ovvero la frequenza fondamentale vale $f = 1/T$. Dicesi armonica una qualunque sinusoide che ha come frequenza un multiplo intero della fondamentale. Ipotizzando a priori la veridicità del teorema di Fourier, ci si chiede come sia possibbile ricavere i coefficente che pesano le varie sinusoidi che sommate approssimano la funzione periodica data.

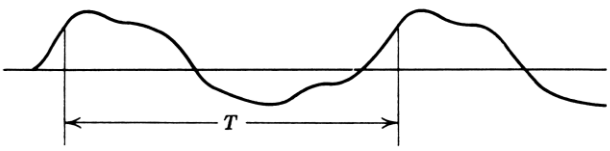

Figura 1 Funzione periodica arbitraria.

Per il teorema di Fourier, si può scrivere

$$\begin{gathered} f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots \\ b_0 + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots . \end{gathered} \tag{1}$$

I coefficienti a_i e b_i (con $i \in \mathbb{N}_0$) possono essere ricavati utilizzando la proprietà di ortogonalità delle sinusoidi. Tale proprietà afferma che *l'integrale del prodotto di due sinusoidi qualsiasi di diversa frequenza, su un intervallo nel quale siano commensurabili (ad esempio da* $-\pi$ *a* π *o da* 0 *a* 2π*) è zero. Cioè*

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0, && m \neq n \\ &\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0, && m \neq n \\ &\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0, && m \neq n \lor m = n \end{aligned} \tag{2}$$

È noto, inoltre, che

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi \tag{3}$$

Quindi, se ogni termine della (1) è moltiplicato per $\cos(n\omega t)$ e integrato fra 0 e 2π, tutti i termini a destra si annullano eccetto il termine $a_n \cos(n\omega t)$, ovvero

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)\, d(\omega t) = \int_0^{2\pi} a_n \cos^2(n\omega t)\, d(\omega t)$$

Dalla (3), l'integrale sulla destra vale $a_n\pi$, se ne deduce allora che

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)\, d(\omega t)\,, \qquad n > 0.$$

In maniera analoga, per ottenere i b_n, tutti i termini della (1) devono essere moltiplicati per $\sin(n\omega t)$ e integrati e si ottiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\omega t)\, d(\omega t), \qquad n > 0.$$

Per ottenere invece i termini costanti, è sufficiente integrare ogni termine nel periodo T, rendendolo in tal modo nullo:

$$\int_0^{2\pi} f(t) d(\omega t) = \int_0^{2\pi} (a_0 + b_0) d(\omega t) = 2\pi(a_0 + b_0),$$

che equivale a dire che $a_0 + b_0$ è il valor medio della funzione $f(t)$. Si è così ottenuta l'espansione in serie della funzione periodica $f(t)$.